Одиннадцатая школа-конференция "Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов"

19 – 24 августа 2024 г., г. Самара

ПОСТЕРНЫЕ ДОКЛАДЫ

НАУКА И УНИВЕРСИТЕТЫ

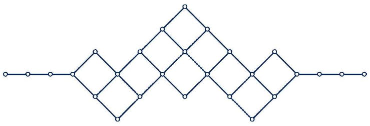
НАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКТЫ РОССИИ

SIMC

Steklov International Mathematical Center

МИАН

Одиннадцатая школа-конференция
"Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов"



Модули Демазюра уровня 1
и векторные расслоения на проективной прямой

Бельдиев Иван Сергеевич

НИУ ВШЭ, Москва

Основные понятия

Мы работаем над полем $\mathbb{C}$. Детали конструкций можно найти в [1, 2, 3].

Определение. Алгебра Вирасоро Vir — алгебра Ли, линейно порождённая образующими L_n, $n \in \mathbb{Z}$, и центральным элементом c, удовлетворяющими следующим коммутационным соотношениям:

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}, \quad [c, L_n] = 0.$$

Алгебра Ли Vir_+ — подалгебра в Vir с базисом из элементов L_n, $n \geqslant 0$.

Группа $\mathrm{Aut}\mathcal{O}$ — группа непрерывных автоморфизмов полной топологической алгебры $\mathcal{O} = \mathbb{C}[[z]]$, базу окрестностей нуля которой образуют пространства $z^N\mathbb{C}[[z]]$, $N \in \mathbb{Z}$. Каждый такой автоморфизм однозначно задаётся действием на z и имеет вид $z \mapsto f(z)$, где $f(z) = a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + \ldots$, $a_1 \neq 0$.
Алгеброй Ли группы $\mathrm{Aut}\mathcal{O}$ является $z\mathbb{C}[z]\partial_z$, изоморфная Vir_+; изоморфизм осуществляется посредством отображения $L_j \mapsto -z^{j+1}\partial_z$.
Если V — такое конечномерное представление Vir_+, что действие L_0 на V диагонализуемо с целочисленными собственными значениями, то, как можно проверить, действие Vir_+ на V может быть экспоненцировано до действия группы $\mathrm{Aut}\mathcal{O}$ на V, что превращает V в левый $\mathrm{Aut}\mathcal{O}$-модуль.
В работе [1, Глава 6] показано, как по конечномерному представлению V алгебры Vir_+ канонически построить векторное расслоение на гладкой алгебраической кривой X. Обозначим Aut_X множество пар (x, t_x), где $x \in X$, t_x — формальный локальный параметр в x. Если L_0 действует на V диагонализуемо с целыми собственными значениями, то соответствующее расслоение $\mathcal{V}_X$ определяется как

$$\mathcal{V}_X = \mathrm{Aut}_X \underset{\mathrm{Aut}\mathcal{O}}{\times} V = \mathrm{Aut}_X \times V/\{((x, f(t_x)), v) \sim ((x, t_x), f \cdot v)\},$$

где $f = f(z) = a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + \ldots \in \mathrm{Aut}\mathcal{O}$.
Если зафиксировать локальный параметр $t_x \in \mathcal{O}_x$, то слой $\mathcal{V}_X$ над точкой x отождествляется с V.
Пусть L_n — решётка корней алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, L_n' — решётка весов. Определим $\mathfrak{h}_n = L_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$. Алгебра Гейзенберга $\hat{\mathfrak{h}}_n$, построенная по $\mathfrak{h}_n$ — центральное расширение $\mathfrak{h}_n((t))$,

$$0 \to \mathbb{C}1 \to \hat{\mathfrak{h}}_n \to \mathfrak{h}_n((t)) \to 0,$$

с соотношениями ($h_n = h \otimes t^n$)

$$[h_n, g_m] = n(h, g)\delta_{n,-m}.$$

Определим представление Фока π_λ алгебры $\hat{\mathfrak{h}}_n$, $\lambda \in \mathfrak{h}_n$. Оно порождено вакуумным вектором $|\lambda\rangle$ и определено формулами

$$h_n|\lambda\rangle = 0, n > 0; h_0|\lambda\rangle = (\lambda, h)|\lambda\rangle.$$

Для каждого $\gamma \in L_n'/L_n$ определим

$$V_{L_n}^{\gamma} = \bigoplus_{\lambda \in \gamma + L_n} \pi_\lambda.$$

На данном пространстве можно ввести естественное действие алгебры Vir (см. [1, Chapter 5]).
Для любого $\lambda \in L_n$ определён бозонный вертексный оператор

$$V_\lambda(z) = S_\lambda z^\lambda \exp\left(\sum_{n<0} \frac{\lambda_n}{n} z^{-n}\right) \exp\left(\sum_{n>0} \frac{\lambda_n}{n} z^{-n}\right) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} V_\lambda[m] z^{-m-(\lambda,\lambda)/2},$$

Здесь $V_\lambda[m]$ — линейные операторы, действующие на $V_{L_n}^{\gamma}$.

Определение. Пусть $\lambda \in L_n'$. Модуль Демазюра W^λ уровня 1 — подпространство в $V_{L_n}^{\lambda}$, полученное из вектора $|\lambda\rangle$ применением всевозможных операторов $V_\mu[m]$, $\mu \in L$, $m \geq 0$.
Известно, что W^λ конечномерно и инвариантно относительно естественного действия Vir_+.

Основные результаты

Рассмотрим случай, когда $X = \mathbb{CP}^1$. Известно, что любое векторное расслоение над $\mathbb{CP}^1$ раскладывается в прямую сумму одномерных. Возникает вопрос: в сумму каких одномерных расслоений раскладывается $\mathcal{V}_{\mathbb{P}^1}$ для конкретных V?
Одним из результатов работы является вычисление склеивающего коцикла φ_{01} (который однозначно задаёт векторное расслоение на проективной прямой). Оказывается, что он полностью определяется действием операторов L_0 и L_1.

Предложение. Склеивающий коцикл φ_{01} в точке $(z_0 : z_1)$ равен $\exp(\frac{L_1}{z})(-\frac{1}{z^2})^{-L_0}$, где $z = z_1/z_0$.

Более того, получен следующий результат, указывающий, как можно вычислить расслоение на $\mathbb{P}^1$, зная разложение V на жордановы подпространства относительно оператора L_1.

Предложение. Пусть V — L_0-градуированное пространство ($\dim V = s$), снабжённое действием L_1, которое представляет собой один жорданов блок, и $v_1, v_2, \ldots, v_s$ — жорданов базис, $L_1(v_{i-1}) = v_i$. Если $L_0(v_1) = l_{\max}v_1$, $L_0(v_s) = l_{\min}v_s = (l_{\max} - s + 1)v_s$, то соответствующее векторное расслоение изоморфно

$$\mathcal{O}(l_{\max} + l_{\min})^{\oplus s} = \mathcal{O}(2l_{\max} - s + 1)^{\ominus s}.$$

Следующим результатом работы является вычисление явного разложения расслоения $\mathcal{V}_{\mathbb{P}^1}$ в прямую сумму одномерных для модулей Демазюра уровня 1, соответствующих аффинной алгебре Каца-Муди $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, порождённых вакуумным вектором $|k\omega_1\rangle$, где ω_1 — первый фундаментальный вес. Как удалось вычислить автору, соответствующее расслоение на $\mathbb{P}^1$ изоморфно прямой сумме (предполагая $d_n = 0$, $r_0 = k$)

$$\bigoplus_{\substack{d_1 \geqslant \ldots \geqslant d_{n-1} \geqslant 0 \\ r_1 \geqslant \ldots \geqslant r_{n-1} \geqslant 0}} \mathcal{O}(2N - kd_1)^{\oplus \prod_{i=1}^{n-1} \binom{r_i - d_{i+1}}{r_i - d_i}\binom{r_{i+1} - r_i + d_{i+1}}{d_i}}, \ N \in \mathbb{Z}.$$

Отдельно отметим случай $n = 2$, когда любой вес кратен фундаментальному. В этом случае векторное расслоение отвечающее весу $k\omega_1$, изоморфно прямой сумме

$$\bigoplus_{r=0}^{[k/2]} (2N - kr)^{\oplus \binom{K+1}{2r+1}}.$$

Дальнейшие направления исследований

Возможное продолжение работы — вычисление явного вида описанного выше расслоения для модулей Демазюра уровня 1 с весами, отличными от кратных первому фундаментальному. Кроме того, помимо решётки L_n корней алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n\mathbb{C})$, можно рассматривать аналогичную конструкцию для других чётных решёток. Наконец, интересно изучение описанного выше расслоения не только в случае проективной прямой, но и для других гладких алгебраических (например, эллиптических) кривых.

Список литературы

[1] E. Frenkel and D. Ben-Zvi, Vertex Algebras and Algebraic Curves, Second Edition. Mathematical Surveys and Monographs, ISSN 0076-5376; v. 88, 2004

[2] V. Kac and A.K. Raina, Bombay lectures on highest weight representations of infinite dimensional Lie algebras. Advanced Series in Mathematical Physics 2, World Scientific, 1987

[3] V. Kac, Infinite-dimensional Lie algebras, Third Edition. Cambridge University Press, 1990.

Неприводимые характеры максимальных унипотентных подгрупп в группах типа A_n и C_n

Венчаков Михаил

НИУ ВШЭ

Основные понятия

G — конечная группа,
$\varphi\colon G \to GL(V)$ — её представление,
$\psi\colon G \to \mathbb{C}$ — характер представления φ.
$\psi(g) = \mathrm{tr}\ \varphi(g)$, $g \in G$,
$supp(\psi) = \{g \in G \mid \psi(g) \neq 0\}$ — его носитель.
$G = SL_n(\mathbb{F}_q)$, а $N = UT(n, \mathbb{F}_q)$, $\mathfrak{n} = Lie\ N$, $N \curvearrowright \mathfrak{n}$, $N \curvearrowright \mathfrak{n}^*$.
$\Phi^+ = \{(i,j) \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$ — множество положительных корней.
В случае, когда $G = SL_n(\mathbb{F}_q)$, $\mathfrak{n}^*$ можно отождествить с нижнетреугольными матрицами с помощью формы следа.

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, * \in \mathbb{F}_q \right\}$$

$$\mathfrak{n} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \right\},\ \mathfrak{n}^* = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Метод орбит

Группа N действует на $\mathfrak{n}^*$ по правилу $g.\lambda = (g\lambda g^-1)_{\mathrm{low}}$.
1962 г., А.А. Кириллов: Irr $N \leftrightarrow \mathfrak{n}^*/N$.
В этом случае, значение характера, соответствующего орбите формы Ω, на элементе g группы N равно

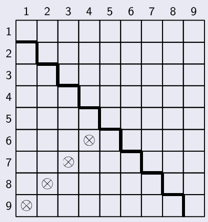
$$\psi_\Omega(g) = \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}} \sum_{\mu\in\Omega} \theta(\mu(\ln(g))),\ \theta\colon \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}^\times,$$

$$\ln(g) = \sum_1^n (-1)^n \frac{(g-E)^n}{n}.$$

Для $n \leqslant 7$: А.Н. Панов, М.В. Игнатьев в 2007 классифицировали орбиты коприсоединённого действия.

Регулярные характеры

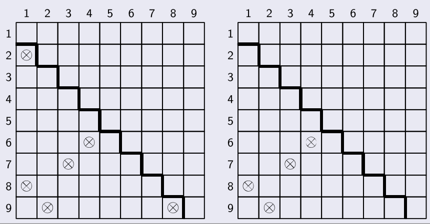
Регулярные характеры — характеры максимальной размерности (соотвествующие орбитам размерности M).



А.А. Кириллов, 1962: классификация регулярных орбит.
C.A.M. Andre, 2001: формула для регулярных характеров.

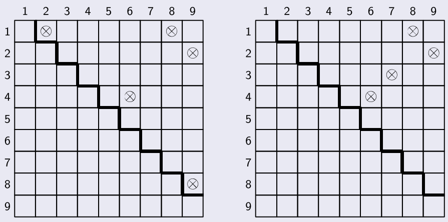
Субрегулярные характеры

Субрегулярные орбиты соответствуют характерам предмаксимальной размерности (соотвествующие орбитам размерности $M-2$).
Классификация : А.Н. Панов, М.В. Игнатьев, 2007. Примеры:



Носитель субрегулярного характера

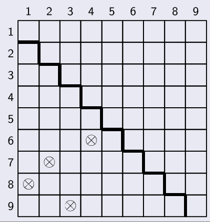
Элементы носителя имеют вид:



М.В. Игнатьев, 2007: формула для субрегулярного характера.

Характеры глубины 2

Характеры глубины 2 — характеры, соответствующие орбитам размерности $M-4$.



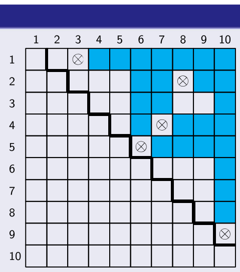
Теорема (М.В., 2022)

а) Найден носитель $supp(\psi) = \bigcup\limits_{D,\varphi} K_{D,\varphi}$.
б) Вычислено значение $\psi(K_{D,\varphi}) = q^{m_D} \prod_{(i,j)\in D} \theta(\xi_{i,j} x_{j,i})$.
в) Получены уравнения, описывающие $K_{D,\varphi}$.
Здесь $\varphi : D \to \mathbb{F}_q^\times$, а $K_{D,\varphi}$ — класс сопряжённости элемента

$$x_{D,\varphi} = (x_{i,j}) = 1 + \sum_{(i,j)\in D} \varphi_{i,j} e_{i,j}.$$

$D \in \Phi^+$ — некоторое подмножество положительных корней.

Пример



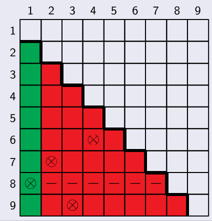
Для белых клеток $\Delta_{i,j}(g) \quad \Delta_{i,j}(x_{D,\varphi})$.
$\beta_k = \sum\limits_{j=3}^{5} g_{1,j} g_{j,k} = 0$, $\alpha_s = \sum\limits_{j=7}^{10} g_{s,i} g_{i,10} = 0$, $s = 4, 5$, $k = 6, 7$.

Метод Макки

$G = A \rtimes B$, $A \lhd G$, $A \cap B = \{e\}$, $G = AB$
A — абелева, $g = g_A g_B$, π_A, $\pi_B \colon G \to A, B$
$k \in$ Irr A, $\psi \in$ Irr B^k
$k_0 = k \circ \pi_A$, $\psi_0 = \psi \circ \pi_B$
Теорема. $\{\Psi_{k,\psi} = Ind_{AB^k}^G k_0 \psi_0\} =$ Irr G.

Схема доказательства

$A = \{g \in N \mid g_{i,j} = 0$ для всех $2 \leqslant j < i \leqslant n\}$,
$B = \{g \in N \mid g_{i,1} = 0$ при $2 \leqslant i \leqslant n\}$,
$k(g) = \theta(\xi_{n-1,1} g_{1,n-1})$, $\xi_{n-1,1} \neq 0$.



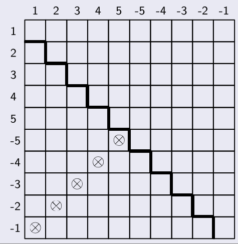
Случай $G = Sp(2n, \mathbb{F}_q)$

$G = \{g \in SL(n, \mathbb{F}_q) \mid g^t J g = J\}$,
$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$,
$N = G \cap UT(n, \mathbb{F}_q)$.
Алгебра $\mathfrak{n}$ состоит из строго верхнетреугольных ($\mathfrak{n}^*$, соответственно, из строго нижнетреугольных) матриц x, удовлетворяющих условию

$$x^t J + Jx = 0.$$

Регулярные орбиты

Орбиты максимальной размерности имеют вид:



Примеры элементов из носителя

Элементы носителя имеют вид:

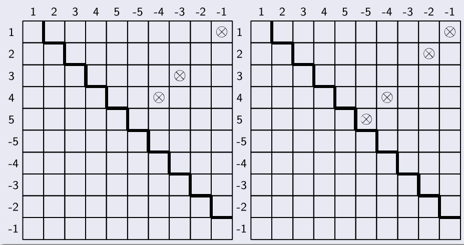
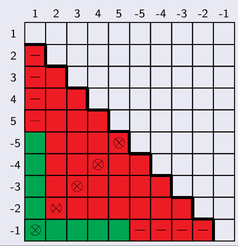


Схема доказательства

В данном случае, $k(g) = \theta(\xi_{n,1} g_{1,n})$, $\xi_{n,1} \neq 0$.



Одиннадцатая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов»

Конструкция локального слайса

Вялкин Тимофей Владиславович

ВШЭ, МГУ, Москва

Основные понятия

Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле характеристики ноль. B — область целостности, являющаяся алгеброй над $\mathbb{K}$.

Определение 1. Дифференцированием на алгебре B — это линейное отображение $D : B \to B$, удовлетворяющее тождеству Лейбница:

$$\forall f, g \in B: \ D(fg) = D(f)g + fD(g).$$

Определение 2. Дифференцирование называется локально нильпотентным или ЛНД, если для любого $b \in B$ существует $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такое, что $D^n(b) = 0$.

Определение 3. ЛНД неприводимо, если его образ не содержится ни в каком главном идеале.

Определение 4. Локальным слайсом называется такой элемент $r \in B$, что $D(r) = q$ для некоторого $q \in \operatorname{Ker} D \setminus \{0\}$.

Пусть B — алгебра, градуированная абелевой группой G:

$$B = \bigoplus_{g \in G} B_g.$$

Определение 5. ЛНД называется однородным, если для любого $s \in G$ существует такой $d \in G$, что $DB_s \subseteq B_{s+d}$.

Пусть $B = \mathbb{K}^{[n]}$ — алгебра многочленов от n переменных.

Определение 6. Корангом ЛНД на B называется такое максимальное число k, что существует система координат, что k переменных лежат в ядре. Рангом, соответственно, называется $n - k$.

Определение 7. Зафиксируем $n-1$ многочлен $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1} \in B$. Якобиевым дифференцированием от $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ называется такое дифференцирование $\delta_{(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})}$, что для любого многочлена $h \in B$: $\delta_{(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})}(h)$ равно определителю матрицы Якоби от $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, h$.

Определение 8. ЛНД на B называют треугольным, если существует система координат, в которой для любого переменного x_i $D(x_i) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})$.

Далее $B = \mathbb{K}^{[3]}$.

Пусть для ЛНД D выполняются следующие два свойства (*):

- оно неприводимо
- $\exists r \in B \setminus gB \ \exists P \in \mathbb{K}^{[1]} \ Dr = gP(f) \neq 0$

Известно, что $\operatorname{Ker} D = \mathbb{K}[f, g]$ для некоторых $f, g \in B$. Поскольку D — неприводимо, можно считать, что $D = \delta_{(f,g)}$. Рассмотрим $\overline{B} := B/gB$ и $\overline{D} := D(\mathrm{mod}\ gB)$. Заметим, что $\overline{D}r = 0$. Из [1] известно, что ядро ЛНД алгебраически замкнуто в B. Поэтому $\operatorname{Ker} \overline{D}$ — это алгебраическое замыкание $\mathbb{K}[f]$. Соответственно, $\exists \phi \in \mathbb{K}[f]^{[1]}$ минимальной степени по r такой, что $\phi(r) \in gB$. Положим $h = g^{-1}\phi(r)$.

Gene Freudenburg в статье [2] доказал следующую теорему.

Теорема 1. Если D удовлетворяет (*), то

- $\delta_{(f,h)}$ — ЛНД.
- $\delta_{(f,h)}r = -hP(f)$
- Если $\delta_{(f,h)}$ — неприводимо, то $\operatorname{Ker} \delta_{(f,h)} = \mathbb{K}[f, h]$

Данная процедура, называемая Конструкцией локального слайса или КЛС, позволяет строить новые ЛНД по данному. Заметим, что этот процесс обратим.

Основные результаты

Также в [2] описан ряд однородных дифференцирований ранга 3 относительно естественной $\mathbb{Z}$-градуировки. Пусть

$$F = xz - y^2, \ r = -(x^3 + yF), \ H_0 = -y, \ H_1 = x, \ H_2 = F;$$

$$H_{n-1}H_{n+1} = H_n^3 + r^{a_n}, \ a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}.$$

Рассмотрим $\theta_n = \delta_{(H_n, H_{n+1})}$.

Теорема 2. Для любого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

- θ_n — неприводимое однородное ЛНД.
- $\theta_n r = H_n H_{n+1}$
- При $n \geq 1$ θ_{n+1} получается из θ_n применением КЛС.

В [1] также доказано следующее предложение.

Предложение 1. Любое неприводимое ЛНД ранга ≤ 2 получается из ∂_z конечным числом КЛС, где ∂_z — частная производная по z.

Теперь пусть

$$u = xz + y^m, \ w = G(x, u) + yu^n, \ G \in \mathbb{K}^{[2]};$$

При применении КЛС к $\delta_{(u,x)}$, используя локальный слайс w, мы получаем класс ЛНД вида $\delta_{(u,v)}$, где

$$u = xz - y^m, \ v = \frac{(G(x,u) - G(0,u) + yu^n)^m + u^{mn+1}}{x}.$$

Этот класс включает в себя также $\delta_{(u,v)}$ — ЛНД ранга 3, описанные в работе Сергея Гайфуллина и Nikhilesh Dasgupta [3], что

$$u = xz - y^m;$$

$$w = xF(x, u) + yu^n, \ F \in \mathbb{K}^{[2]}, \ F(x, 0) \notin \mathbb{K};$$

$$v = \frac{u^{mn+1} + w^m}{x}.$$

Примеры

Пример 1. Рассмотрим ∂_z. Это ЛНД неприводимо, и за r можно взять $r = xz + y$. Понятно, что $r \notin x\mathbb{K}^3$ и $\partial_z(r) = x, \ g = x, \ P(y) = 1, \ \phi(y)(r) = xz + y - y \in x\mathbb{K}^3$. Применив КЛС, получим $\delta_{(y,z)} = \partial_x$. Отсюда легко заметить, что частные производные довольно естественно получаются друг из друга применением КЛС.

Пример 2. Возьмем треугольное ЛНД T. Пусть $\operatorname{Ker} T = \mathbb{K}[x, P]$, где $P = a(x)z + b(x, y)$. Нетрудно заметить, что $D = \partial_z$, $r = yP$ дает T после применения КЛС.

Пример 3. В [1] описано известное ЛНД ранга 3 $\delta_{(F,G)}$, называемое (2,5)-дифференцированием, где

$$F = xz - y^2, \ R = x^3 + yF, \ G = \frac{F^3 + R^2}{x}.$$

Рассмотрим $D = x\partial_y + 2y\partial_z$. Заметим, что D неприводимо и $\operatorname{Ker} D = \mathbb{K}[x, F]$. Применив КЛС к D, используя локальный слайс R, получим $\delta_{(F,G)}$. А поскольку D является треугольным ЛНД, то, используя пример 2, можно сказать, что (2,5) получается из ∂_z за два шага.

Дальнейшие направления исследований

Заметим, что КЛС позволяет образовать неориентированный граф из ЛНД на $\mathbb{K}^3$, где вершинами будут ЛНД, а они будут соединены ребром, если одно ЛНД получается из другого с помощью КЛС. Из предложения 1 можно увидеть, что подграф этого графа из ЛНД ранга ≤ 2 связен. А также все известные нам примеры ЛНД ранга 3 соединены с ∂_z и, значит, в одной компоненте связности графа.

Гипотеза. Весь граф связен. Более сильной формулировкой задачи будет, что любое ЛНД ранга 3 получается из ∂_z конечным числом КЛС.

Вообще говоря, КЛС не сохраняет однородность ЛНД. Поэтому интересен вопрос: в каких случаях однородность всё же сохраняется. А также изучение обобщения теоремы 2 для других градуировок представляет интерес.

Список литературы

[1] Gene Freudenburg "Algebraic theory of locally nilpotent derivations". Encyclopaedia Math. Sci. 136, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2017.

[2] Gene Freudenburg "Local slice constructions in $\mathbb{K}[X, Y, Z]$". Osaka J. Math. 34 (1997) 757–767.

[3] Nikhilesh Dasgupta, Sergey Gaifullin "On locally nilpotent derivations of polynomial algebra in three variables". arXiv [illegible].

Ограничение на ранги в полных исключительных наборах

Роман Елисеев

Зафиксируем алгебраически замкнутое поле k характеристики ноль. Пусть $\mathcal{T}$ - линейная триангулированная категория над полем k.

Определение. *Упорядоченный набор полных триангулированных подкатегорий* $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_t \subseteq \mathcal{T}$ *называется полуортогональными разложением, если выполнены следующие два условия:*

1. *для любых индексов* $1 \leq i < j \leq t$ *и любых объектов* $A_i \in \mathcal{A}_i, A_j \in \mathcal{A}_j$ *имеем* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(A_j, A_i) = 0$;
2. *минимальная полная триангулированная подкатегория в* $\mathcal{T}$*, содержащая все подкатегории* $\mathcal{A}_i$*, совпадает с* $\mathcal{T}$*.*

Полуортогональное разложение с компонентами $\mathcal{A}_i$ будем обозначать

$$\mathcal{T} = \langle \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_t \rangle$$

Нас будут интересовать полуортогональные разложения $D^b(X)$, ограниченной производной категории когерентных пучков на алгебраическом многообразии X.

Определение. *Полная триангулированная подкатегория* $\mathcal{A}$ *называется допустимой, если функтор вложения* $i : \mathcal{A} \to \mathcal{T}$ *имеет левый и правый сопряженные.*

Допустимые подкатегории позволяют строить примеры полуортогональных разложений. А именно, если $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ - допустимая, имеются полуортогональные разложения

$$\mathcal{T} = \left\langle \mathcal{A}^{\perp}, \mathcal{A} \right\rangle \quad \text{и} \quad \mathcal{T} = \left\langle \mathcal{A}, {}^{\perp}\mathcal{A} \right\rangle,$$

где подкатегории

$$\begin{aligned} {}^{\perp}\mathcal{A} &= \{T \in \mathcal{T} \mid \mathrm{Hom}(T, A[s]) = 0 \text{ при всех } A \in \mathcal{A}, s \in \mathbb{Z}\}, \\ \mathcal{A}^{\perp} &= \{T \in \mathcal{T} \mid \mathrm{Hom}(A[s], T) = 0 \text{ при всех } A \in \mathcal{A}, s \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

называются левым и правым ортогоналом к $\mathcal{A}$ соответственно. Допустимые подкатегории легко строить с помощью исключительных наборов.

Определение. *Объект* $E \in \mathcal{T}$ *называется исключительным, если*

$$\mathrm{Hom}(E, E[t]) = \begin{cases} \mathbf{k}, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

Например, когерентный пучок $\mathcal{F}$ на алгебраическом многообразии является исключительным, если $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{F}) = \mathrm{k}$ и $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{F}) = 0$ при всех $i > 0$. По исключительному объекту $E \in \mathcal{T}$ можно построить минимальную полную триангулированную подкатегорию $\langle E \rangle \subset \mathcal{T}$, его содержащую. Оказывается, что $\langle E \rangle$ эквивалентна производной категории конечномерных векторных пространств $D^b(\mathbf{k})$ и является допустимой в $\mathcal{T}$. Данная конструкция имеет следующее обобщение.

Определение. *Последовательность* $E_1, E_2, \ldots, E_t$ *исключительных объектов называется исключительным набором, если при всех* $1 \leq i < j \leq t$ *и всех* $s \in \mathbb{Z}$ *выполнено* $\operatorname{Hom}(E_j, E_i[s]) = 0$. *Исключительный набор называется полным, если* $\mathcal{T} = \langle E_1, E_2, \ldots, E_t \rangle$.

Всякая полная триангулированная подкатегория $\langle E_1, E_2, \ldots, E_t \rangle \subset \mathcal{T}$, порожденная исключительным набором, также является допустимой.
Также обозначим группу Гротендика $K(\mathcal{T})$ категории $\mathcal{T}$ вместе с билинейной формой ("Эйлерова форма") определенная формулой $\langle [F], [G] \rangle := \sum_i (-1)^i \dim_k \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(F, G[i])$. Если $\mathcal{T} = D^b(\operatorname{coh}(X))$ для гладкого проективного многообразия X размерности d тогда $K(X)_{\text{num}} \stackrel{\text{def}}{=} K(\mathcal{T})_{\text{num}}$ конечно-порожденная абелева группа. Более того, действие $(-1)^d s$ на $K(\mathcal{T})$ а следовательно на $K(\mathcal{T})_{\text{num}}$ унипотентно [1, Лемма 3.1].

Полный исключительный набор $(E_i)_i$ в $\mathcal{T}$ определяет базис $(e_i)_i$ в $K(\mathcal{T})$ матрица Грама которого $M := \langle e_i, e_j \rangle_{ij}$ верхнетреугольная матрица с единицами на главной диагонали. Понятно, что в этом случае мы имеем, что $K(\mathcal{T}) = K(\mathcal{T})_{\text{num}}$. Назовем базис $(e_i)_i$ в $K(\mathcal{T})$ с такой матрицей Грама исключительным. В [1, Пример 3.2], показано, что если $\operatorname{rk} K = 3$ тогда унипотентность s влечет, что коэффициенты матрицы Грама

$$M = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

должны удовлетворять уравнению Маркова

$$a^2 + b^2 + c^2 - abc = 0$$

Марковым показано, [2] что все решения данного уравнения могут быть получены некоторой процедурой мутации из набора $(3, 3, 3)$. Эта процедура соответствует мутациям исключительного набора. Таким образом получаем $K \cong K(\mathbb{P}^2)$. В случае $\operatorname{rk}(K) = 4$, можно записать матрицу Грама как:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

В этом случае унипотентность s влечет следующие диофантовы уравнения:

$$\begin{cases} acdf - abd - ace - bcf - def + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 = 0 \\ af - be + cd = 0 \end{cases}$$

Список литературы

[1] A. Bondal and A. Polishchuk, Homological properties of associative algebras: the method of helices, Russian Acad. Sci. Izv. Math. 42 (1994), no. 2, 219–260.

[2] A. Markov, Sur les formes quadratiques binaires indéfinies, Math. Ann. 15 (1879), no. 3, 281–406.

Школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов»

Инварианты невырожденных квадратичных поверхностей

Илья Заволокин, МГУ им. М.В. Ломоносова

Август 2024

Основные понятия

- *Вполне невырожденная модельная поверхность* CR–*типа* (n,k), $k < n^2$ *(невырожденная квадрика) - это поверхность в* $\mathbb{C}^{n+k}$ *задаваемая следующими уравнениями:*
$$\begin{cases} \operatorname{Im} w_1 = \overline{z}^T H^1 z, \\ \operatorname{Im} w_2 = \overline{z}^T H^2 z, \\ \dots \\ \operatorname{Im} w_k = \overline{z}^T H^k z, \end{cases}$$
где $z \in \mathbb{C}^n$ *- вектор-столбец, а* $H^1, \dots, H^k$ *- эрмитовы матрицы порядка* $n \times n$, *которые кроме того удовлетворяют условиям невырожденности, а именно:* $H^1, \dots, H^k$ *- линейно независимы и* $\cap_m KerH^m = \{0\}$. *Набор эрмитовых форм* $(H^1, \dots, H^k)^T$, *удовлетворяющий условиям невырожденности, будем называть невырожденным.*
- *Линейные невырожденные замены координат вида:* $z \to Cz$, $w \to \rho w$, $C \in GL(n, \mathbb{C})$, $\rho \in GL(k, \mathbb{R})$ *не меняют класс биголоморфно эквивалентных квадрик, но меняют вид уравнений и тем самым задают* действие α *на множестве невырожденных наборов эрмитовых форм* $\mathcal{M}$. *Именно, если обозначить* $G = GL(n,\mathbb{C}) \times GL(k,\mathbb{R})$, *то* $\alpha : G \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ *по формуле:*
$$\alpha((C,\rho),(H^1,\dots,H^k)^T) = \rho^{-1}(\overline{C}^T H^1 C, \dots, \overline{C}^T H^k C)^T,$$
задает правое действие на $\mathcal{M}$.

Замечание

Естественным образом возникает вопрос, почему мы рассматриваем только линейные замены координат, а не голоморфные? Ответ на этот вопрос заключается в том, что если даны две модельные поверхности, между которыми существует биголоморфизм, то между ними существует и линейный изоморфизм указанного вида.

Задача

Описать пространство орбит для невырожденной квадрики. Сколько орбит? Какие инварианты?

Известные результаты

- *Для* CR–*типа* $(n,1)$, *т.е. одной невырожденной эрмитовой формы пространство орбит конечно. Из линейной алгебры известно, что любая невырожденная эрмитова форма* H *приводится к виду:* $\overline{z}^T Hz = |z_1|^2 + \ldots + |z_m|^2 - |z_{m+1}|^2 - \ldots - |z_n|^2$. *Инвариантом является целое число* $|n - 2m|$.
- *Для* CR–*типа* $(n,2)$ *число классов эквивалентности может являться конечным или бесконечным в зависимости от* n. *Так, для* $n = 2,3$ *орбит конечное число (3 и 10 соответственно). Если же* $n \geqslant 4$, *то орбит уже бесконечно. Инвариантами в первом случае является некий дискретный набор величин, во втором же случае к ним надо добавить еще* $n-3$ *инварианта, связанных с двойным отношением четырех точек [1].*
- *Если рассмотреть подкласс модельных поверхностей* CR–*типа* $(3,3)$, *обладающих нелинейными автоморфизмами, то всего будет 8 орбит [2].*

В случае точки общего положения

Оказывается, всего 2 не дискретных, независимых инварианта, один из которых J*-инвариант некоторой кубики с коэффициентами, зависящими от всех трех матриц* (H^1, H^2, H^3).

Идея доказательства

В точке общего положения $H = (H^1, H^2, H^3)$ *для типа* $(3,3)$ *пространство орбит будет 25-мерно, а не дискретных инвариантов будет ровно 2. Это можно получить, проанализировав общую структуру автоморфизмов модельных поверхностей. Один инвариант можно получить из уравнения* $\chi_H(t_1,t_2,t_3) = \det(t_1H^1 + t_2H^2 + t_3H^3) = 0$, *где* $[t_1 : t_2 : t_3] \in \mathbb{C}P^2$. *А именно, надо привести эту кубику к нормальной форме Вейерштрасса:* $t_2^2 t_3 = 4t_1^3 - g_2 t_1 t_3^2 - g_3 t_3^3$ *и рассмотреть* $J = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2}$, *который и будет инвариантом. Несложная проверка*
$$\chi_{\alpha((C,\rho),H)}(t) = |\det C|^2 \chi((\rho^{-1})^T t),$$
показывает, что кривая корректно определена. Второй инвариант можно получить из общего метода [3]. В этой работе найдены все однородные отосительные полиномиальные инварианты. Как показывают компьютерные вычисления, ненулевыми полиномами являются следующие:
$$P_6 = \varepsilon^I(3,6,(1,4))\varepsilon^J(3,6,id)\varepsilon_K(3,6,(2,5))H^{k_1}_{i_1 j_1} \dots H^{k_6}_{i_6 j_6},$$
$$P_9 = \varepsilon^I(3,9,(2,5,8))\varepsilon^J(3,9,id)\varepsilon_K(3,9,(3,6,9))H^{k_1}_{i_1 j_1} \dots H^{k_9}_{i_9 j_9},$$
$$\varepsilon^I(n,un,\sigma) = \varepsilon^{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(n)}}\varepsilon^{i_{\sigma(n+1)}\cdots i_{\sigma(2n)}}\dots\varepsilon^{i_{\sigma(un-n+1)}\cdots i_{\sigma(un)}}$$
$$\varepsilon^{i_1\dots i_n} = \begin{cases} sgn(i_1,\dots,i_n), \text{ если } (i_1,\dots,i_n) \in S_n, \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$
Из них можно составить рациональный инвариант: $I = P_9^2/P_6^3$. *Более того, вне некоторого собственного алгебраического множества, этот инвариант оказывается функционально независимым с введенным выше* J*-инвариантом.*

Применение

Образующие поля рациональных инвариантов действия α *позволяют описывать пространство модулей модельных поверхностей многообразий заданного типа. А пространство модулей, в свою очередь, позволяет строить CR-характеристические классы [4].*

Список литературы

1. *С.Н. Шевченко, «Описание алгебры инфинитезимальных автоморфизмов квадрик коразмерности два и их классификация», Матем. заметки, 1994, том 55, выпуск 5, 142–153.*
2. *Н.Ф. Палинчак, «Вещественные квадрики коразмерности 3 в* $\mathbb{C}^6$ *и их нелинейные автоморфизмы», Изв. РАН. Сер. матем., 1995, том 59, выпуск 3, 159–178.*
3. *T. Garrity, R. Mizner, «Invariants of vector-valued bilinear and sesquilinear forms», Linear Algebra and its Applications, Vol. 218 (1995), pp 225–237.*
4. *В. К. Белошапка, «Пространство модулей модельных вещественных подмногообразий», Russian Journal of Mathematical Physics, Vol. 13, No. 3, 2006, pp 245–252.*

Многомерный символ Конту-Каррера

Левашев Владислав
НИУ ВШЭ

Предварительные сведения

Пусть A некоторое коммутативное ассоциативное кольцо. Кольцо рядов Лорана $A((t))$ представляется следующим образом:

$$A((t)) = \varinjlim_{j \geq 0} t^{-j} \varprojlim_{i \geq 0} A[t]/t^i A[t].$$

Теперь, если на A была задана топология(необязательно уважающая операции), то представление выше даёт топологию на кольце формальных степенных рядов. Итерируя эту операцию и считая топологию на A дискретной, получаем топологию на кольце рядов Лорана от n переменных $A((t_1))...((t_n))$.
Далее будем писать $\mathcal{L}(A)$ вместо $A((t))$ и $\mathcal{L}^n(A)$, вместо $A((t_1))...((t_n))$. Очевидно, $\mathcal{L}$ функтор из категории коммутативных колец в себя.
Определение. Пусть A коммутативное ассоциативное кольцо. Назовём элемент $f \in A((t))$ топологически нильпотентным, если f^n стремится к нулю относительно топологии, введённой выше. Обозначим $\mathcal{L}(A)^{\#}$ множество топологически нильпотентных элементов.
Предложение. Пусть A не раскладывается в произведение колец $A_1 \times A_2$. Если $f \in A((t))^*$ тогда существует $a \in A^*, g \in \mathcal{L}(A)^{\#}$ и $l \in \mathbb{Z}$ такие, что $f = a(1+g)t^l$.
Замечание. Если A может раскладываться как $A_1 \times A_2$ или, иными словами, $Spec(A)$ необязательно связен, то верно аналогичное утверждение, только нужно число l заменить на локально-постоянную функцию $l : Spec(A) \to \mathbb{Z}$.

Одномерный символ

К. Конту-Каррер в работах [1], [2] определил билинейное спаривание:

$$CC_1 : \mathcal{L}(A)^* \times \mathcal{L}(A)^* \to A^*,$$

которое непрерывно, инвариантно относительно непрерывных автоморфизмов $A((t))$ и функториально по кольцу A.
Для $\mathbb{Q}$-алгебры A. Делинь в своей работе [3] привёл следующую явную формулу для этого символа:
Теорема. Пусть A это $\mathbb{Q}-$алгебра. Если $f \in 1 + \mathcal{L}(A)^{\#}, g \in \mathcal{L}(A)^*$, тогда

$$CC_1(f, g) = \exp res(\log(f)\frac{dg}{g}).$$

Пример 1. Если $A = k$ это поле, то символ Конту-Каррера совпадает с ручным символом.
Пример 2. Пусть $A = {}^{k[\varepsilon]}\diagup_{\varepsilon^3}$, тогда

$$CC_1(1+\varepsilon f, 1+\varepsilon g) = 1 + \varepsilon^2 res(f dg).$$

Теорема (Закон взаимности). Пусть C гладкая проективная кривая над полем k, A артинова $k-$алгебра, $C' = C \times Spec(A)$. Тогда для любых двух элементов $f, g \in (k(C) \otimes A)^*$:

$$\prod_{p \in C} Nm_{k(p)/k} CC_1(f, g) = 1$$

Замечание. Из примера 1 легко получить закон взаимности Вейля, а из примера 2 получается утверждение о том, что сумма вычетов дифференциальной формы на гладкой проективной кривой равна нулю.

Многомерный символ

Д. Осипов и Х.Жу для $n = 2$ и Д.Осипов и С. Горчинский для всех n определили n-мерный символ Конту-Каррера([4], [5]):

$$CC_n : \mathcal{L}^n(A)^* \times ... \times \mathcal{L}^n(A)^* \to A^*,$$

где слева стоит произведение $n+1$ копий $\mathcal{L}^n(A)^*$. Как и одномерный символ он полилинеен, непрерывен, не меняется при непрерывных автоморфизмах и функториален по кольцу A. В [5] доказывается следующая явная формула для этого символа, аналогичная той, которую привёл Делинь:
Теорема. Пусть A это $\mathbb{Q}-$алгебра. Если $f \in 1 + \mathcal{L}^n(A)^{\#}, f_1, ..., f_n \in \mathcal{L}^n(A)^*$, тогда

$$CC_n(f, f_1, ..., f_n) = \exp res(\log(f)\frac{df_1}{f_1} \wedge ... \wedge \frac{df_n}{f_n}).$$

Зададимся задачей описать все символы, которые удовлетворяют условиям выше. Тогда верна такая теорема.
Теорема. Пусть для всех колец A задано

$$(\cdot, ..., \cdot) : (\mathcal{L}^n(A)^*)^{\otimes n+1} \to A^*$$

полилинейное отображение, которое непрерывно, инвариантно относительно непрерывных автоморфизмов и функториально по кольцу A. Тогда существует такое целое m, что выполнено:

$$(f_0, ..., f_n) = \pm CC_n(f_0, ..., f_n)^m.$$

Отметим, что при доказательстве этого факта существенную роль играет следующее утверждение:
Теорема. Пусть k бесконечное поле и

$$< \cdot, ..., \cdot >: k((t_1))...((t_n))^{\otimes(n+1)} \to k$$

полилинейная форма, инвариантная относительно непрерывных автоморфизмов и непрерывная по каждому из аргументов. Тогда

$$< f_0, ..., f_n >= C Res(f_0 df_1 \wedge ... \wedge df_n)$$

для некоторой константы $C \in k$.

Список литературы

[1] Contou-Carrère, Carlos, "Local jacobian, universal Witt bivector group and the tame symbol". C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I 318, No. 8, 743-746 (1994),
[2] Carlos Contou-Carrère, "Jacobienne locale d'une courbe formelle relative". Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 130 (2013), pp. 1–106,
[3] Deligne, P., "Le symbole modéré". Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. 73, 147-181 (1991),
[4] D Osipov, X Zhu "The two-dimensional Contou-Carrére symbol and reciprocity laws". arXiv preprint arXiv:1305.6032, 2013,
[5] С. О. Горчинский, Д. В. Осипов, "Многомерный символ Конту-Каррера: локальная теория". Матем. сб., 206:9 (2015), 21–98.

Лиевская структура многообразий разрешимых йордановых алгебр

А.В. Попов
Ульяновск, Россия
klever176@rambler.ru

Будем предполагать, что основное поле $\mathbb{F}$ имеет нулевую характеристику.

Пусть L — произвольная алгебра Ли, G — алгебра Грассмана счетного ранга. Известно [1], [2], что пространство $J(L) = G \otimes L \oplus G_1$ с операцией умножения $\circ$, заданной правилами

$$(a \otimes g) \circ h = h \circ (a \otimes g) = a \otimes gh, \text{ если } g \in G_0,\ h \in G_1,$$

$$(a \otimes g) \circ (b \otimes h) = [a, b] \otimes gh, \text{ если } g, h \in G_1,$$

является йордановой алгеброй с тождествами

$$x^4 \equiv 0, \qquad (x_1 x_2)(y_1 y_2)(z_1 z_2) \equiv 0. \tag{1}$$

Более того, данная конструкция определяет мономорфизм $\mathcal{J}$ из решетки многообразий алгебр Ли в решетку многообразий йордановых алгебр, удовлетворяющих тождествам (1). А именно, пусть $\mathcal{V}$ — многообразие алгебр Ли и L — произвольная алгебра Ли, порождающая $\mathcal{V}$, то есть $\mathcal{V} = \operatorname{var}(L)$. Тогда $\mathcal{J}(\mathcal{V}) = \operatorname{var}(J(L))$.

Для многообразия разрешимых йордановых алгебр $\mathcal{V}$ определим обёртывающее многообразие алгебр Ли $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ как наименьшее лиевское многообразие такое, что $\mathcal{W} \subset \mathcal{J}(\mathcal{L}(\mathcal{V}))$, где $\mathcal{W}$ — подмногообразие $\mathcal{V}$, состоящее из всех алгебр, удовлетворяющих тождествам (1).

Как оказывается, многие свойства произвольного многообразия разрешимых йордановых алгебр $\mathcal{V}$ полностью определяются его обёртывающим многообразием $\mathcal{L}(\mathcal{V})$. Ниже представлены некоторые из таких свойств.

1. Для произвольной алгебры A определим по индукции её сильно разрешимые степени $A^{((k))}$: $A^{((0))} = A$, $A^{((k))}$ — наименьший идеал A, содержащий в себе $A^{((k-1))}A^{((k-1))}$. Многообразие $\mathcal{V}$ сильно разрешимо, если для некоторого k любая алгебра A из $\mathcal{V}$ сильно разрешима индекса не более k, то есть $A^{((k))} = 0$.

   Теорема 1. Многообразие разрешимых йордановых алгебр $\mathcal{V}$ сильно разрешимо тогда и только тогда, когда многообразие $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ разрешимо.

2. Многообразие $\mathcal{V}$ называется T-первичным, если произведение любых ненулевых T-идеалов (то есть идеалов, инвариантных относительно эндоморфизмов алгебры) в свободной алгебре данного многообразия не равно нулю.

   Теорема 2. Если многообразие разрешимых йордановых алгебр $\mathcal{V}$ является T-первичным, то $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ также T-первично и, кроме того, $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождествам (1).

3. **Теорема 3.** Многообразие разрешимых йордановых алгебр $\mathcal{V}$ имеет экспоненциально ограниченный рост тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ имеет экспоненциально ограниченный рост.

Список литературы

[1] А.В. Попов. Йордановы алгебры лиева типа. Мат. труды **22** (2019), no. 1, 2019, 127–177.
[2] И.П. Шестаков. Альтернативные и йордановы супералгебры. Труды X Сибирской Школы «Алгебра и Анализ». Новосибирск, ИМ СО РАН, 1997, 157–169.

Non-invertible quasihomogeneus singularities and their Landau-Ginzburg orbifolds

Anton Rarovskii

Faculty of Mathematics, National Research University Higher School of Economics
Skolkovo Institute of Science and Technology
aararovskiy@edu.hse.ru

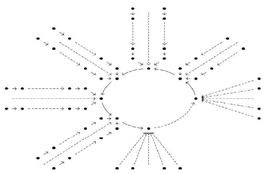
The work is based on the preprint [R].

Main definitions

The polynomial $f \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ is called *quasihomogeneus* with a set of weights $(v_1, ..., v_N, d) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{N+1}$ if the equality $f(\lambda^{v_1}x_1, \lambda^{v_2}x_2, ..., \lambda^{v_N}x_N) = \lambda^d f(x_1, x_2, ...x_N)$ is true for any $\lambda \in \mathbb{C}^*$. *Jacobian algebra* of polynomial f is the quotient ring of the ring of polynomials by the ideal generated by its partial derivatives $\mathrm{Jac}(f) := \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_N]/_{(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_N})}$. The group of *maximal diagonal symmetries* of f is called the group $G_f = \{(g_1, g_2, \ldots, g_N) \in (\mathbb{C}^*)^N \mid f(g_1x_1, g_2x_2, \ldots, g_Nx_N) = f(x_1, x_2, \ldots, x_N)\}$. Any subgroup $G \subseteq G_f$ is called a group of *diagonal symmetries* (or just a group of *symmetries*). If G is a group of symmetry of any non-degenerate polynomial f, we can consider the pair (f, G) which is called *Landau-Ginzburg orbifold*.

Graph description of quasihomogeneus singularities

Let $(v_1, ..., v_N, d) \in \mathbb{N}^{N+1}$ be a system of weights ($v_i < d$) and $f \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ be a quasihomogeneous polynomial defining an isolated singularity in zero. We are going to construct the graph by a map $\kappa : \{1, \ldots, N\} \to \{1, \ldots, N\}$, which we would call *choice*, if it satisfies the condition: for any $j \in I$ the sets $J = \{j\}$ and $K = \{\kappa(j)\}$ f contains as a summand $b \cdot x_j^{a_j} \cdot x_{\kappa(j)}$, where $b \in \mathbb{C}^*, a_j \in \mathbb{N}$ and $a_j \geq 2$. We will call *type* the conjugacy class κ with respect to the natural action of the group S_N on the set of indices. Then vertices of the corresponding oriented graph are labeled by $\{1, \ldots, N\}$, and an edge of the graph is an ordered pair $(j, \kappa(j))$. In this case the oriented graph without numbering of vertices defines the type. From the classification we have that any non-invertiable polynomial has a form $f = f_\kappa + f_{add}$, where κ defines a graph $\Gamma_f = \sqcup \Gamma_{f_i}$, where Γ_{f_i} is a graph with the following view which we call *loop with branches*:



Structure of additional polynomial f_{add}.

In [HK] there were introduced some combinatorial conditions on the set $R = supp(f)$ such that f is non-degenerate. We introduce the admissible collection which is the collection of sets of indices such that the following theorem holds.

Theorem 1. *Let A_R be an admissible collection of $R = supp(f_\kappa)$ and there is a set $\{b_{J_k}\}$ such that $\forall$ $J_k \in A_R$ we have $\sum_{s \in J_k} b_s v_s = d$ and $b_s > 0$. Then, there is a set $\{\varepsilon_{J_k} \in \mathbb{C}^*\}$ such that the polynomial $f = f_\kappa + f_{add}$ is non-degenerate with $f_{add} = \sum_{J_k \in A_R} \varepsilon_{J_k} x_{k_1}^{b_{k_1}} x_{k_2}^{b_{k_2}} \ldots x_{k_l}^{b_{k_l}}$.*

Roughly, we introduce the collection of monomials entering f_{add} such that starting from the arbitrary fixed f_κ we obtain non-degenerate quasihomogeneus $f = f_\kappa + f_{add}$. Now let we have the loop with branches graph on n vertices. For any $m \in \{1, \ldots, n\}$ consider the set $S_m \subset \{1, \ldots, N\}$ consisting of all vertices from which we have an arrow ending in m.

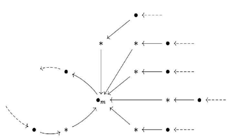
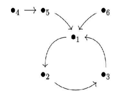


FIGURE 2. The elements of S_m are marked as stars

Then we also define $A^m := \{J_k \subset S_m \mid |J_k| \geq 2\}$ to be the set of all subsets of S_m with at least two elements. Now we are ready to formulate the following theorem:

Theorem 2. *The set $A_R = \cup_{m=1}^n A^m$ is an admissible collection for $R = supp(f_\kappa)$.*

For instance, consider the map κ which defines the following graph:



and the set of powers $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = (3, 2, 4, 2, 3, 4)$ that defines the weight system $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, d) = (1, 2, 1, 1, 2, 1, 5)$, i.e. the polynomial defined by κ has the form

$$f_\kappa = x_1^3x_2 + x_2^2x_3 + x_3^4x_1 + x_5^2x_1 + x_4^3x_5 + x_6^4x_1$$

and $R = supp(f_\kappa)$. By theorem above, the admissible collection A_R has the form $A_R = A^1 = \{\{3, 5\}, \{3, 6\}, \{5, 6\}, \{3, 5, 6\}\}$. Thus the set of corresponding ε_{J_k} exists and we take $f_{add} = \varepsilon_{3,5}x_3x_5^2 + \varepsilon_{3,6}x_3^2x_6^3 + \varepsilon_{5,6}x_5^2x_6 + \varepsilon_{3,5,6}x_3^2x_5x_6$.

Crepant resolution and orbifold equivalence

Let $f : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}$ be a holomorphic G-invariant function. Thus it could be defined on $\mathbb{C}^N/G$. Let $\tau : \widehat{\mathbb{C}^N/G} \to \mathbb{C}^N/G$ be a crepant resolution of the singularity. The map f then descends to a function on $\widehat{\mathbb{C}^N/G}$ by taking composition with τ and we obtain a function $\hat{f} : \widehat{\mathbb{C}^N/G} \to \mathbb{C}^N$. Let $\widehat{\mathbb{C}^N/G}$ be covered by some charts $U_1, \ldots, U_s$ all isomorphic to $\mathbb{C}^N$. We denote $\hat{f}_i$ as a restriction of $\hat{f}$ on the each chart

$$\hat{f}_i = \hat{f}|_{U_i} : U_i \to \mathbb{C}^N$$

Orbifold equivalence could be roughly understood as the equivalence $\mathrm{HMF}(\bar{f}) \cong \mathrm{HMF}^G(f)$ of derived categories of G-equivariant matrix factorizations. In this case there is an isomorphism between Hochschild cohomology of category of G-equivariant matrix factorizations $HH^*(MF_G(f))$ and an algebra $Jac(\bar{f})$.

Now we start with polynomial f_{κ_0} and assume that there is an index $t \in T_{\kappa_0}$ such that the corresponded power is even, i.e. there is a monomial $x_t^{2a_t}x_{\kappa(t)}$.

By Theorem 1 we obtain $f_0 = f_{\kappa_0} + f_{add}$, where f_{add} is given by the admissible collection for $R = supp(f_{\kappa_0})$. Then we consider the polynomial $f_\kappa = f_{\kappa_0} + x_{N+1}^2$ with the set of powers $(2a_1, \ldots, a_N, 2)$ which is quasihomogeneus with the reduced set of weights $(q_1, \ldots, q_N, 1/2)$. Note that the corresponding graph Γ_κ is a disjoint union of Γ_{κ_0} and 1 isolated vertex. Since x_{N+1}^2 is invertible, the admissible collection A_R for $R = supp(f_\kappa)$ coincides with the admissible collection for $R = supp(f_{\kappa_0})$. It follows that $f = f_\kappa + f_{add}$ is non-degenerate by Theorem 1 (with the same f_{add} as for f_0).

Our object of research is Landau-Ginzburg orbifold (f, G) with the symmetry group $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \langle g \rangle$ acting as follows:

$$g \cdot x_m = -x_m \text{ if } m = 1; N+1$$

$$g \cdot x_m = x_m \text{ else}$$

It means that g acts non-trivially only on isolated vertex and on the leaf with even power.

Theorem 3. *Let Landau-Ginzburg orbifold (f, G) be as above. Then there is a non-degenerate quasihomogeneus polynomial $\bar{f}$ with the following properties:*

1. *$\bar{f}$ has a reduced system of weights $(2q_1, q_2, \ldots, q_N, 1/2 - q_1)$*
2. *$\bar{f} = f_{\bar{\kappa}} + \bar{f}_{add}$ with the graph $\Gamma_{\bar{\kappa}} = \circ_{\Gamma_\kappa}(N+1, 1)$ and $\bar{f}_{add} = f_{add}(t_1, \ldots, t_N)$ where we put $t_1^2 = x_1$ and $t_m = x_m$ for $m \neq 1$;*

such that (f, G) and $(\bar{f}, \{id\})$ are orbifold equivalent. In particular there is an equivalence of triangulated categories

$$\mathrm{HMF}(\bar{f}) \cong \mathrm{HMF}^G(f).$$

References

[HK] C. Hertling, R. Kurbel, *On the classification of quasihomogeneous singularities*, Journal of Singularities Volume 4 (2012), 131-153. DOI: 10.5427/jsing.2012.4h

[R] A. Rarovskii, *Non-invertible quasihomogeneus singularities and their Landau-Ginzburg orbifolds*, arXiv preprint:2405.17091

Василий Рождественский

Об одной открытой проблеме в топологии многообразий

В 1963 году Н. Стинродом был поставлен следующий вопрос (см. [1]).

Вопрос. *Существует ли $(n+1)$-мерное гладкое замкнутое многообразие W такое, что любое n-мерное гладкое замкнутое многообразие M может быть гладко вложено в W?*

Из классификации одномерных и двухмерных замкнутых многообразий легко видеть, что при $n = 1, 2$ ответ на данный вопрос положительный. Однако известно, что при $n = 3$ (см. [2] и [3]) и при составных n, не равных степени двойки, ([4]) искомого $(n+1)$-мерного многообразия W не существует. В связи с этим кажется разумным ожидать, что при $n \geq 3$ ответ на вопрос Стинрода должен быть отрицательным.

В дальнейшем будем считать, что все рассматриваемые многообразия гладкие, замкнутые и ориентированные. В этом случае нормальное расслоение к M в W будет тривиальным одномерным. Следовательно, стягивание дополнения к трубчатой окрестности M в W дает отображение $f\colon W \to \Sigma M$ степени 1. Здесь через Σ обозначен функтор надстройки. Таким образом, в качестве разумного ослабления вопроса Стинрода можно рассматривать следующий вопрос.

Вопрос $(*)$. *Существует ли $(n+1)$-мерное многообразие W такое, что для произвольного n-мерного многообразия M существует отображение $f\colon W \to \Sigma M$ такое, что $f_*[W] = \Sigma[M]$? Здесь, $[M] \in H_n(M;\mathbb{Z})$, $[W] \in H_{n+1}(W;\mathbb{Z})$ — фундаментальные классы.*

Используя конструкцию выше и теорему трансверсальности Тома несложно заметить, что этот вопрос эквивалентен следующему.

Вопрос $(*')$. *Существует ли $(n+1)$-мерное многообразие W такое, что для любого n-мерного многообразия M существует n-мерное многообразие M' такое, что:*

1. *многообразие M' может быть гладко вложено в W;*
2. *существует отображение $f\colon M' \to M$ степени 1.*

Известно, что если хотеть существования отображения просто ненулевой степени (а не именно степени 1), то в качестве W можно взять сферу S^{n+1}. Именно, верно следующее утверждение.

Утверждение. *Для любого n-мерного многообразия M существуют ненулевое число k и отображение $f\colon S^{n+1} \to \Sigma(M)$ такие, что $f_*[S^{n+1}] = k\Sigma[M]$.*

Однако в качестве ответа на исходный вопрос $(*)$ взять в качестве W сферу S^{n+1} в общем случае нельзя. Одним из препятствий к этому служит действие операций Стинрода на фундаментальном классе многообразия M. Насколько известно автору, вопрос $(*)$ является открытым.

Список литературы

[1] R. Lashof, Problems in differential and algebraic topology. Seattle Conference, 1963, *Ann. of Math.* 81(3):565-591, 1965.

[2] A. Kawauchi, The imbedding problem of 3-manifolds into 4-manifolds, *Osaka J. Math.* 25(1):171-183, 1988.

[3] T. Shiomi, On imbedding 3-manifolds into 4-manifolds, *Osaka J. Math.* 28(3):649-661, 1991.

[4] D. Fan, S. Wang, and J. Yao, On embedding all n-manifolds into a single $(n+1)$-manifold, *Trans. Amer. Math. Soc.* 360(11):6017–6030, 2008.

Introduction to Bridgeland stability conditions

Anna Savelyeva [1] following works of Thomas Bridgeland [2]
Advisor: Daniel Huybrechts [3]
[1]Ecole Normale Suppe rieure, Paris [2]University of Sheffield [3]University of Bonn

Introduction

Stability conditions were first introduced by T. Bridgeland in [1]. They provide a way to associate to a triandulated category $\mathcal{D}$ a topological manifold — the space of all stability conditions $\mathrm{Stab}(\mathcal{D})$. They are of interest not only as a new invariant of triangulated categories, but as a way to introduce geometric ideas into the homological algebra world. For example, the group $\mathrm{Aut}(\mathcal{D})$ of exact autoequivalences of a triangulated category acts on the space $\mathrm{Stab}(\mathcal{D})$ preserving a natural metric.

In the case of derived categories of coherent sheaves on K3 surfaces Bridgeland theorem provides a particular interest to study stability conditions. There turns out to be a covering map from a connected component of the space of stability conditions to a subset of the complexification of the cohomology lattice of the K3 surface, such that the group of derived autoequivalence acts on it by deck transformations (see Theorem 2).

Our goal is to go through the notion of stability conditions and to describe what is known about their behavior in the case when $\mathcal{D}$ is the derived category of coherent sheaves on a K3 surface.

The first column is devoted to the abstract categorical definitions. The main reference for this part is [1]. In the second column we specialise to the case of derived categories of coherent sheaves on varieties, in particular on $K3$ surfaces. For more information on this case see [2].

Stability conditions

We begin by defining a **slicing** of a triangulated category $\mathcal{D}$, which is a way to chose a set of subcategories enumerated by real numbers that, in a sense, generate $\mathcal{D}$.

Definition: A **slicing** $\mathcal{P}(\varphi)$ on a triangulated category $\mathcal{D}$ consists of full additive subcategories $\mathcal{P}(\varphi)$ for $\varphi \in \mathbb{R}$ such that the following conditions hold:

- For every $P_1 \in \mathcal{P}(\varphi_1)$, $P_2 \in \mathcal{P}(\varphi_2)$ it holds that $\mathrm{Hom}(P_1, P_2) = 0$ if $\varphi_1 > \varphi_2$;
- $\mathcal{P}(\varphi)[1] = \mathcal{P}(\varphi + 1)$;
- For every $0 \neq E \in \mathcal{D}$ there exists a finite sequence of real numbers $\varphi_1 > \varphi_2 > \ldots > \varphi_n$ and a collection of triangles

$$\begin{tikzcd}
 & E_1 \arrow[rr] \arrow[dl, equal] & & E_2 \arrow[r] \arrow[dl] & \ldots \arrow[r] & E_{n-1} \arrow[rr] & & E_n \arrow[r, equal] \arrow[dl] & E, \\
A_1 & & A_2 \arrow[ul, "{[1]}"] & & & & A_n \arrow[ul, "{[1]}"] & &
\end{tikzcd} \tag{1}$$

with $A_i \in \mathcal{P}(\varphi_i)$ for all i.

The objects $P \in \mathcal{P}(\varphi)$ are called **semistable** of **phase** φ. It is easy to verify that in these conditions for an object $E \in \mathcal{D}$ the decomposition (1) is unique. It is called a **Harder–Narasimhan filtration** of E. and the objects A_i are called its **semistable factors**.

It turns out natural to add an additional condition to the definition of a slicing — the fact that it behaves well with respect to the triangulated structure.

Definition: A **stability condition** is a pair $\sigma = (Z, \mathcal{P})$, where $\mathcal{P}$ is a slicing and

$$Z\colon K(\mathcal{D}) \to \mathbb{C}$$

is an additive group homomorphism from the Grothendieck group of $\mathcal{D}$ to $\mathbb{C}$ such that for every $P \in \mathcal{P}(\varphi)$ it holds that $Z(P) \in \mathbb{R}_{>0} \cdot \exp(i\pi\varphi)$.

It turns out that in the case when $(Z, \mathcal{P})$ is a stability condition, the categories $\mathcal{P}(\varphi)$ are not only additive but abelian for all φ.

The topological space of stability conditions

In this section we introduce a metric on the space of all stability conditions $\mathrm{Stab}(\mathcal{D})$, thus providing it with the structure of a topological space.

Notation: Given a stability condition $\sigma = (Z, \mathcal{P})$, for an object $E \in \mathcal{D}$ let (1) be its Harder–Narasimhan filtration. We then denote by $\varphi^+_\sigma(E)$ and $\varphi^-_\sigma(E)$ the maximal and minimal phases φ_1 and φ_n respectively of its semistable factors. We also denote by $m_\sigma(E)$ the sum $\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |Z(A_i)|$.

Definition: Let σ_1, σ_2 be two stability conditions on a triangulated category $\mathcal{D}$. A **distance** between σ_1 and σ_2 is the number $d \in [0, \infty]$ defined as

$$d(\sigma_1, \sigma_2) := \sup_{0 \neq E \in \mathcal{D}} \left(|\varphi^+_{\sigma_1}(E) - \varphi^+_{\sigma_2}(E)|, |\varphi^-_{\sigma_1}(E) - \varphi^-_{\sigma_2}(E)|, |\log \frac{m_{\sigma_1}(E)}{m_{\sigma_2}(E)}|\right).$$

One can check that d is indeed a metric, and thus defines a topology on the set $\mathrm{Stab}(\mathcal{D})$.

Consider a natural projection $\mathcal{Z}\colon \mathrm{Stab}(\mathcal{D}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K(\mathcal{D}), \mathbb{C})$ that takes $\sigma = (Z, \mathcal{P})$ to Z. The space on the right is a complex vector space and thus is equipped with a natural topology. It is easy to check that the map $\mathcal{Z}$ is continuous. The following result of Bridgeland shows us that for every connected component of $\mathrm{Stab}(\mathcal{D})$ it behaves as a local homeomorphism on a linear subspace.

Theorem 1: For each connected component $\Sigma \subset \mathrm{Stab}(\mathcal{D})$ there exists a linear subset $V(\Sigma) \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K(\mathcal{D}), \mathbb{C})$ such that $\mathcal{Z}(\Sigma) \subset V(\Sigma)$ and $\mathcal{Z}\colon \Sigma \to V(\Sigma)$ is a local homeomorphism.

The theorem shows that $\mathrm{Stab}(\mathcal{D})$ locally behaves as $\mathbb{R}^\infty$. Note that the group of exact autoequivalences $\mathrm{Aut}(\mathcal{D})$ acts on $\mathrm{Stab}(\mathcal{D})$ preserving the distance function.

Stability conditions on varieties

From now on the triangulated category $\mathcal{D}$ will be a bounded derived category $\mathrm{D}^b(\mathrm{Coh}(X))$ of coherent sheaves on a smooth complex projective variety X. In this case we can reduce the space of stability conditions without loosing the essential part of its properties so that it becomes finite dimensional and thus a topological manifold.

We begin by defining a bilinear form on the Grothendieck group $K(X)$ of the category $\mathrm{D}^b(\mathrm{Coh}(X))$.

Definition: Given $E, F \in \mathrm{D}^b(\mathrm{Coh}(X))$ an **euler characteristic** $\chi(E, F)$ is defined as

$$\chi(E, F) = \sum_i (-1)^i \dim \mathrm{Hom}_X(E, F[i]).$$

Due to Serre duality the left and right radicals ${}^\perp K(X)$ and $K(X)^\perp$ are the same, so the form χ descends to a non-degenerate bilinear form on the **numerical Grothendieck group** $\mathcal{N}(X) = K(X)/K(X)^\perp$. Using Riemann–Roch theorem one can prove that $\mathcal{N}(X)$ is finitely generated.

A stability condition $\sigma = (Z, \mathcal{P})$ is called **numerical** if Z factors through $\mathcal{N}(X)$. From now on by a stability condition we mean a numerical stability condition and we denote by $\mathrm{Stab}(X)$ the set of all numerical stability conditions on $\mathrm{D}^b(\mathrm{Coh}(X))$.

In this case the function $\mathcal{Z}$ defined above factors through $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{N}(X), \mathbb{C}) = \mathcal{N}(X) \otimes \mathbb{C}$. We will now denote by $\mathcal{Z}$ the map $\mathrm{Stab}(X) \to \mathcal{N}(X) \otimes \mathbb{C}$, which is a finite dimensional vector space.

In this setting Theorem 1 still holds, and thus the connected components of $\mathrm{Stab}(X)$ are all finite dimensional topological manifolds.

Sheaves on K3 surfaces

Now let X be a K3 surface. This case is especially well studied. In particular, it is known that, restricted to a distinguished connected component, the map $\mathcal{Z}$ is not only a local homeomorphism but actually a covering map. We will now discuss this famous result by Bridgeland together with the following conjectures, and their use to the study of the group of derived autoequivalences of K3 surfaces.

In the case when X is a K3 surface there exists a correctly defined group homomorphism called **Mukai vector** $v\colon \mathcal{N}(X) \to H^*(X, \mathbb{Z})$, defined as

$$v(E) = \mathrm{ch}(E)\sqrt{\mathrm{td}(X)},$$

that induces an isomorphism $\mathcal{N}(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathrm{NS}(X) \oplus \mathbb{Z}$, where $\mathrm{NS}(X) \subset H^2(X, \mathbb{Z})$ is the Neuron–Severi group of X.

There exists a natural action of the group $\mathrm{Aut}(\mathrm{D}^b(X))$ on the cohomology $H^*(X, \mathbb{Z})$, that coincides with the action of $\mathrm{Aut}(\mathrm{D}^b(X))$ on $\mathcal{N}(X)$ under the Mukai vector isomorphism. We denote by $\mathrm{Aut}_0(\mathrm{D}^b(X))$ the subgroup of the kernel of the action.

Stability conditions on K3 surfaces

Consider all the stability conditions $\sigma \in \mathrm{Stab}(X)$ such that all the skyscraper sheaves are semistable of phase 1 with respect to σ. These stability conditions are called **geometric** as they can also be defined via a geometric construction (see [2]). It turns out that they all lie in the same, distinguished, connected component of $\mathrm{Stab}(X)$ that we denote by $\mathrm{Stab}^\dagger(X)$.

The following theorem provides the main interest to study stability conditions for derived categories of coherent sheaves on K3 surfaces.

Theorem 2 (Bridgeland): Denote by $\Omega \subset \mathcal{N}(X)$ the image of $\mathrm{Stab}^\dagger(X)$ under $\mathcal{Z}$. Then the map

$$\mathcal{Z}\colon \mathrm{Stab}^\dagger(X) \to \Omega$$

is a covering and the subgroup $\mathrm{Aut}^\dagger_0(\mathrm{D}^b(X))$ of $\mathrm{Aut}_0(\mathrm{D}^b(X))$ that preserves $\mathrm{Stab}^\dagger(X)$ is the group of deck transformations of $\mathcal{Z}$.

The image $\Omega \subset \mathcal{N}(X) \otimes \mathbb{C}$ can be described in purely linear algebraic terms using the form χ (see [2]).

It is not yet known weather $\mathrm{Aut}^\dagger_0(\mathrm{D}^b(X))$ coincides with $\mathrm{Aut}_0(\mathrm{D}^b(X))$. It is conjectured, however, that it always does, and, in addition, that the space $\mathrm{Stab}^\dagger$ is simply connected.

Conjecture 1: The group $\mathrm{Aut}_0(\mathrm{D}^b(X))$ preserves the distinguished connected component $\mathrm{Stab}^\dagger(X)$ of the space of stability conditions on X.

Conjecture 2: The space $\mathrm{Stab}^\dagger(X)$ is simply connected.

The conjectures above allow us to describe the group of autoequivalences $\mathrm{Aut}_0(\mathrm{D}^b(X))$ as

$$\mathrm{Aut}_0(\mathrm{D}^b(X)) \cong \pi_1(\Omega).$$

Both of the conjectures are proved in case when Picard number of the surface X is equal to 1 and in the non-algebraic case of Picard number 0.

References

[1] T. Bridgeland *Stability conditions on triangulated categories.* Ann. of Math. (2) 166, no. 2, 317–345, 2007.

[2] T. Bridgeland *Stability conditions on K3 surfaces.* Duke Math. J. 141, no. 2, 241–291, 2008.